Препринт ReserachGate 30.11.2020 DOI: 10.13140/RG.2.2.32984.11521

ПАРАДОКС КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ С ВРАЩЕНИЕМ

Алюшин Ю.А.

Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, 119991, Россия

alyushin7@gmail.com

Аннотация

Получено уравнение для определения кинетической энергии в общем случае пространственного движения твердых тел с произвольным вращением. Показано, что при переходе от плоскопараллельного движения, например при вращении относительно фиксированной оси, к пространственному (за счет появления перемещений в направлении оси вращения) кинетическая энергия вращения тела с той же угловой скоростью уменьшается в 2 раза. В системе появляется избыточная энергия, которая может быть направлена на допустимое кинематическими условиями поступательное движение, например для увеличения потенциальной энергии тела в гравитационном поле Земли, как у китайского волчка, либо на увеличение угловой скорости вращающегося тела, как в игрушке «пуговица-жужжалка», либо на реализацию предусмотренных механизмом движений при уменьшении внешних энергозатрат, например, при работе робот–манипуляторов с тремя и более степенями свободы.

Ключевые слова: кинетическая энергия, переменные Лагранжа, моменты инерции, угловые скорости, роботы.

THE PARADOX OF KINETIC ENERGY IN THE SPATIAL MOTION OF BODIES WITH ROTATION

Alyushin Yu.A.

An equation is obtained for determining the kinetic energy in the General case of spatial motion of solids with arbitrary rotation. It is shown that during the transition from plane-parallel motion, for example, when rotating relative to a fixed axis, to spatial motion, due to the appearance of movements in the direction of the axis of rotation, the kinetic energy of rotation of the body with the same angular velocity decreases by 2 times. Excess energy appears in the system, which can be directed to the translational motion allowed by kinematic conditions, for example, to increase the potential energy of the body in the gravitational field of the Earth, as in the Chinese top, or to increase the angular velocity of the rotating body, as in the toy "button-buzzer", or to implement the movements planned by the mechanism while reducing external energy consumption, for example, when working robot manipulators with three or more degrees of freedom.

Keywords: kinetic energy, Lagrange variables, moments of inertia, angular velocities, robots.

Многообразие движений неизмеримо, но, как и всеми другими процессами, ими управляет единственный закон, «… исключений из этого закона не существует; насколько мы знаем, он абсолютно точен. Название его — сохранение энергии» [1]. Но чтобы воспользоваться этим законом необходимо правильно определить характер и значения видов энергии, принимающих участие в рассматриваемом движении.

Кинетическая энергия является обязательным и обычно основным компонентом движения твердых тел. Это требует особой ответственности при выборе методов ее определения, например

при динамическом анализе робот–манипуляторов и иных механизмов, сложность которых с развитием технического прогресса возрастает. Применение общеизвестной формулы

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\omega^2 J_C\,, \tag{1}$$

рекомендуемой в большинстве литературных источников, может привести к ошибке для пространственных движений с вращением из-за отсутствия методики определения момента инерции J_C относительно мгновенной оси вращения при изменении ее положения.

Приведем вывод общих уравнений движения, необходимых для расчета кинетической энергии, используя для этого пространство переменных Лагранжа [2–3]. Для начала рассмотрим вращение тела в плоскости *x-y* относительно полюса $P_0(\alpha_P, \beta_P)$. Исходное положение произвольной точки $M_0(\alpha, \beta)$ определим через угол наклона φ_0 прямой *PM* по отношению к оси *x* и расстояние между точками $|PM|=L_0$

$$\alpha = \alpha_P + L_0 \cos\varphi_0\,, \qquad \beta = \beta_P + L_0 \sin\varphi_0\,. \tag{2}$$

После поворота прямой *PM* на угол $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ координаты точки $M(x, y)$ можно определить по аналогичным соотношениям

$$x = \alpha_P + L_0 \cos\varphi = \alpha_P + L_0 \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi)\,, \qquad y = \beta_P + L_0 \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi)\,.$$

Исключая из этих уравнений длину L_0 и начальное значение угла φ_0 с помощью уравнений (2), получаем систему

$$x = \alpha_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_z - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_z\,, \quad y = \beta_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_z + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_z\,, \quad z = \gamma\,. \tag{3}$$

Уравнения движения с вращением относительно подвижного полюса *P* можно получить с помощью принципа суперпозиции [4–5], наложив на вращение (3) поступательное перемещение

$$x = \alpha + x_P - \alpha_P\,, \qquad y = \beta + y_P - \beta_P\,, \qquad z = \gamma\,. \tag{4}$$

Так как переменные Эйлера и Лагранжа совпадают в исходном состоянии $x_i(\alpha_p, t=0) = \alpha_i$, совмещение движений сводится к замене переменных Лагранжа внешнего движения $x_i^e = x_i^e(\alpha_p, t)$ на выражения для соответствующих переменных Эйлера внутреннего движения $x_i^i = x_i^i(\alpha_p, t)$. Уравнения совмещенного движения $x_i = x_i(\alpha_p, t)$ при последовательном или одновременном их протекании совпадают с уравнениями внешнего движения после замены переменных Лагранжа соответствующими уравнениями для переменных Эйлера внутреннего движения

$$x_i(\alpha_p, t) = x_i^e(x_i^i(\alpha_p, t), t)\,. \tag{5}$$

Внешние и внутренние движения аналогичны переносным и относительным в классической механике, но отличаются обязательным использованием единой системы координат.

В результате суперпозиции, заменяя лагранжевы координаты в уравнениях (4) соответствующими уравнениями из системы (3), получаем систему для вращения твердого тела относительно подвижного полюса

$$x = x_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_z - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_z\,, \qquad y = y_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_z + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_z\,, \qquad z = \gamma\,. \quad (6)$$

В этих уравнениях от времени зависят координаты полюса x_P, y_P и угол поворота тела $\Delta\varphi(t)$. Если их продифференцировать по времени, получим соотношения между скоростями полюса и произвольной частицы (индекс t у координат $x_i \in (x, y, z)$ соответствует дифференцированию по времени)

$$dx/dt \equiv x_t = (x_t)_P - \varphi_t(y - y_P)\,, \qquad dy/dt \equiv y_t = (y_t)_P + \varphi_t(x - x_P)\,, \qquad dz/dt = 0\,. \quad (7)$$

Уравнений (6) – (7) достаточно для определения кинетической энергии при любых движениях абсолютно твердых тел. Для плоскопараллельных движений в других плоскостях они могут быть получены круговой подстановкой, а для более сложных пространственных движений – за счет принципа суперпозиции, который позволяет рассматривать сложные пространственные процессы как одновременную реализацию нескольких плоскопараллельных движений [6].

Кинетическую энергию тела с объёмом V, плотностью ρ и массой m определяет интеграл

$$E_k = 0{,}5\int_V \rho v^2 \delta V = 0{,}5\int_m v^2 \delta m\,. \; E_k = 0{,}5\int_m v^2 \delta m = 0{,}5\rho\int_V v^2 \delta V = 0{,}5\int_m (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)\delta m\,. \quad (8)$$

В уравнении (8) и ниже для обозначения бесконечно малых приращений аргументов и функций в пространстве переменных Лагранжа использован оператор δ, например δx_i и δm. Оператор d характеризует бесконечно малые изменения функций во времени, как использовано выше для компонент скорости $dx_i/dt \equiv x_{i,t}$

Рассмотрим случай, когда по всему объему тела $z_t = 0$

$$E_k = 0{,}5\int_m (x_t^2 + y_t^2)\delta m\,. \quad (9)$$

С учётом соотношений (7) преобразуем правую часть к виду

$$E_k = 0{,}5m[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2] - \varphi_t\int_m [(x_t)_P(y - y_P) - (y_t)_P(x - x_P)]\delta m + 0{,}5\varphi_t^2\int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\delta m\,. \quad (10)$$

Для интегрирования во втором слагаемом воспользуемся понятием центра масс $C(x_C, y_C)$, координаты которого [1–2] являются средне интегральными для массы тела

$$x_C m = \int_m x dm\,, \qquad y_C m = \int_m y dm\,. \quad (11)$$

Так как x_C, y_C остаются одинаковыми для всех частиц, их можно вынести за знак интеграла и вместо (10) записать

$$E_k = 0,5m[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2] - \varphi_t m[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)] + 0,5\varphi_t^2 \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\delta m . \quad (12)$$

Оставшийся в правой части интеграл называют моментом инерции, он определяет важнейшую динамическую характеристику твердого тела, которая является мерой инерции тела при вращательном движении, по аналогии с массой m при поступательном движении,

$$J_P = \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\delta m . \quad (13)$$

В результате вместо (12) можем записать

$$E_k = 0,5mv_P^2 + 0,5\varphi_t^2 J_P - \varphi_t m[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)] . \quad (14)$$

Положение центра масс зависит от конфигурации тела и определяется по уравнениям (11). Положение полюса можно выбрать произвольно. Если в качестве полюса выбрать центр масс, последнее слагаемой обращается в 0 и формула (14) принимает простейший вид

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\varphi_t^2 J_C . \quad (15)$$

Уравнение (15) записано в инвариантной форме и применимо для пространственного движения твёрдых тел, однако может привести к ошибочным результатам из-за отсутствия методики определения момента инерции J_C относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс C, при изменении ее положения в пространстве

Чтобы получить приемлемую для практических расчетов формулу при пространственном движении с вращением, воспользуемся изложенной выше методикой для случая $z_t \neq 0$ и вместо (12) рассмотрим интеграл (8). Пространственное движение можно рассматривать как одновременное участие в 3 плоскопараллельных движениях в различных плоскостях системы координат наблюдателя. Преобразуем правую часть уравнения (8) к виду, согласованному с возможностью изменения координат в каждом из этих движений,

$$E_k = 0,25\int_m [(x_t^2 + y_t^2) + (y_t^2 + z_t^2) + (z_t^2 + x_t^2)]\delta m . \quad (16)$$

Продолжим преобразования по аналогии с (13) – (15) с учетом соотношений (7), выделив нижним индексом i ось, относительно которой вращается тело с угловой скоростью $\theta_{i,t}$. Первый интеграл будет совпадать с приведенным выше для плоскопараллельного движения, но с другим коэффициентом перед интегралом

$$E_k' = 0,25\int_m (x_t^2 + y_t^2)\delta m =$$

$$= 0,25\int_m \{[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2 - 2\theta_{z,t}[(x_t)_P(y - y_P) - (y_t)_P(x - x_P)] + \theta_{z,t}^2[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\}\delta m .$$

Переходя к центру масс C по соотношениям (11), запишем правую часть в виде

$$E_k' = 0,25m[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2] - 0,5m\theta_{z,t}[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)] + 0,25\theta_{z,t}^2 \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\delta m .$$

Если совместить полюс с центром масс, получаем

$$E_k' = 0,25[(x_t)_C^2 + (y_t)_C^2]m + 0,25\theta_{z,t}^2 \int_m [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]\delta m \,. \tag{17}$$

Для двух других интегралов уравнения (16) результаты имеют аналогичный вид

$$E_k'' = 0,25[(y_t)_C^2 + (z_t)_C^2]m + 0,25\theta_{x,t}^2 \int_m [(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2]\delta m \,, \tag{18}$$

$$E_k''' = 0,25[(x_t)_C^2 + (z_t)_C^2]m + 0,25\theta_{y,t}^2 \int_m [(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2]\delta m \,.$$

Объединяя правые части (17) и (18), когда в качестве полюса принят центр масс тела *C*, получаем окончательный результат [6]

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,25(\theta_{x,t}^2 J_C^x + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{z,t}^2 J_C^z) \,, \tag{19}$$

где для моментов инерции использованы обозначения

$$J_C^z = \int_m [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]\delta m \,; \quad J_C^x = \int_m [(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2]\delta m \,; \quad J_C^y = \int_m [(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2]\delta m \,.$$

Моменты инерции могут быть определены как по исходной, так и по текущей конфигурации, так как подынтегральные функции, как это следует из уравнений движения (4), сохраняют свои значения при любом повороте тела, например

$$J_C^z = \int_m [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]\delta m = \int_m [(\alpha - \alpha_C)^2 + (\beta - \beta_C)^2]\delta m = const \,. \tag{20}$$

Если возникает движение в направлениях всех осей координат $x_t \neq y_t \neq z_t \neq 0$, уравнение (19) применимо для любых соотношений угловых скоростей, Только при плоскопараллельном движении в любой плоскости справедливо уравнение (15), которое можно записать в общем виде

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\theta_{i,t}^2 J_C^i \qquad \text{если} \quad x_{i,t} = 0 \,. \tag{21}$$

Отметим, что частный случай (21) не следует из результата (19), если учесть условие $x_{i,t} = 0$. Оно должно быть учтено не в конечном результате, а в начале преобразований, когда преобразует уравнение (16) в (9) и конечный результат (19) в (15). В каждом конкретном случае пространственного движения твердого тела необходимо выяснить возможные изменения линейных и угловых скоростей частиц в выбранной системе координат и после этого определять кинетическую энергию и скорость ее изменения по формулам, соответствующим этим условиям.

Дополнительно отметим, что при записи уравнения (19) по типу (1) в виде суммы двух слагаемых с эквивалентным моментом инерции $\tilde{J}_C$

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\omega^2 \tilde{J}_C \,,$$

соответствующих долям кинетической энергии с вращательным и поступательным движениями, момент инерции $\tilde{J}_C$ уже не является характеристикой только распределения массы по объему тела, а зависит от соотношения угловых скоростей в системе координат наблюдателя

$$\tilde{J}_C = 0,5(\theta_{x,t}^2 J_C^x + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{z,t}^2 J_C^z) / (\theta_{x,t}^2 + \theta_{y,t}^2 + \theta_{z,t}^2) .$$

Уравнение (19) следует использовать для динамического анализа различных механизмов, например, представленных на рис. 1 и 2 [6]. Для каждой схемы приведены основные уравнения движения звеньев из исходного состояния и совмещенные с движением ведущих звеньев. Уравнения для скоростей не приведены для сокращения объема статьи, они могут быть получены дифференцированием уравнений, полученных в результате суперпозиции [6].

Звено 1 робота, структурная схема которого показана на рис.1, закреплено на стойке с помощью вращательной кинематической пары, которая позволяет звену вращаться относительно оси *z*, проходящей через начало координат. Частицы звена изменяют положение в пространстве наблюдателя в соответствии с уравнениями (3), которые с учетом принятой системы координат и положения полюса *P* принимают вид

$$x = \alpha\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z , \qquad y = \alpha\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z , \qquad z = \gamma . \qquad (22)$$

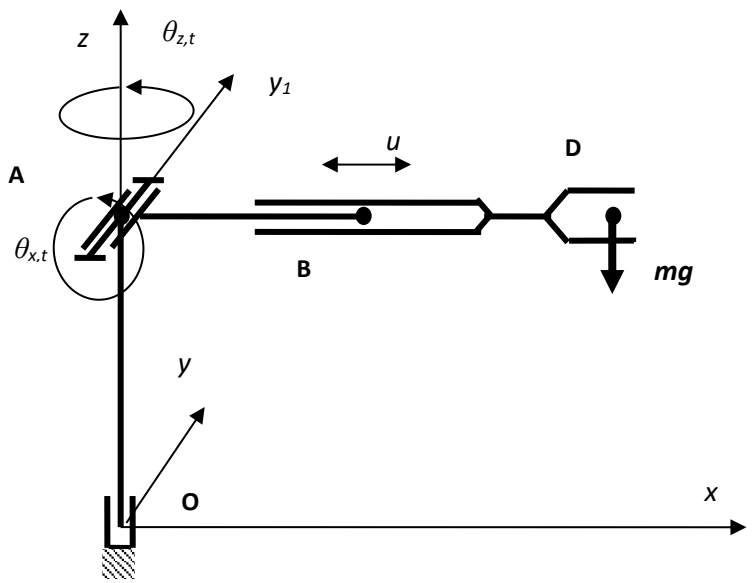

Рис. 1. Структурная схема трехзвенного робота с двумя вращательными и одной поступательной кинематическими парами в исходном положении.

Звено 2 вращается относительно оси y_1, используя привод в кинематической паре с точкой $A(\alpha_A = 0,\ 0,\ \gamma_A = H)$,

$$x = \alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y , \quad y = \beta , \quad z = \gamma_A + (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y . \quad (23)$$

Звенья 2 и 3 соединены поступательной кинематической парой в точке $B(\alpha_B = L_1, 0, \gamma_B = H)$, привод обеспечивает поступательное движение звена 3 относительно звена 2 вдоль оси x, в соответствии с уравнениями (4), например, за счет реечной передачи

$$x = \alpha + (x_B - \alpha_B) = \alpha + u(t), \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma. \tag{24}$$

В соответствии с правилом (5), для совмещенного движения звена 2 при внешнем движении звена 1 следует переменные Лагранжа в уравнениях (22) заменить соответствующими уравнениями из системы (23)

$$\begin{aligned}
(x)_2 &= [\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y]\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z, \\
(y)_2 &= [\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y]\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z, \\
(z)_2 &= \gamma_A + (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y.
\end{aligned} \tag{25}$$

Нижний индекс после скобки конкретизирует номер звена, для которого они применимы в совмещенном движении.

Используя повторно правило (5), получаем уравнения движения для звена 3 с учетом внутреннего движения (24) и внешнего (25)

$$\begin{aligned}
(x)_3 &= [\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y]\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z, \\
(y)_3 &= [\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y]\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z, \\
(z)_3 &= \gamma_A + (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y - (\alpha + u - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y.
\end{aligned} \tag{26}$$

Из системы (26) следует, что звено 3 вращается относительно двух осей $\theta_{y,t} \neq \theta_{z,t} \neq 0$, $\theta_{x,t} = 0$ при $x_t \neq y_t \neq z_t \neq 0$, кинетическую энергию определяет уравнение (19) в виде

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,25(\theta_{z,t}^2 J_C^z + \theta_{y,t}^2 J_C^y). \tag{27}$$

Моменты инерции J_C^i могут быть определены для исходного или другого положения звена, так как в соответствии с (20) они при вращении твердого тела не меняются.

Структурная схема, начальное положение и система координат для второго механизма приведены на рис. 2. Ось z совмещена с осью вертикальной стойки, вдоль которой может перемещаться звено 1 за счет привода в точке $A(0,0,H)$. В точке B звена 1 с начальными координатами $\alpha = L_B$, $\beta = 0$, $\gamma = H$ закреплён привод, обеспечивающий вращательное движение звена 2 относительно вертикальной оси z_1 с угловой скоростью $\theta_{z1,t}$. Звенья 2 и 3 соединены вращательной кинематической парой $D(L_D,0,H)$ с возможностью вращения, за счет дополнительного привода в этой кинематической паре на звене 2, относительно вертикальной оси z_2 с угловой скоростью $\theta_{z2,t}$.

Независимые движения из исходного состояния описывают уравнения:
звено 1 с полюсом в начале координат по аналогии с (4):

$$x = \alpha\,, \qquad y = \beta\,, \qquad z = \gamma + w(t)\,, \tag{28}$$

звено 2 с полюсом $B(L_B, 0, H)$ по аналогии с (3):

$$x = L_B + \left(\alpha - L_B\right)\cos\Delta\theta_{z1} - \beta\sin\Delta\theta_{z1}, \quad y = \left(\alpha - L_B\right)\sin\Delta\theta_{z1} + \beta\cos\Delta\theta_{z1}, \quad z = \gamma\,, \tag{29}$$

звено 3 с полюсом $D(L_D, 0, H)$:

$$x = L_D + \left(\alpha - L_D\right)\cos\Delta\theta_{z2} - \beta\sin\Delta\theta_{z2}, \quad y = \left(\alpha - L_D\right)\sin\Delta\theta_{z2} + \beta\cos\Delta\theta_{z2}, \quad z = \gamma\,. \tag{30}$$

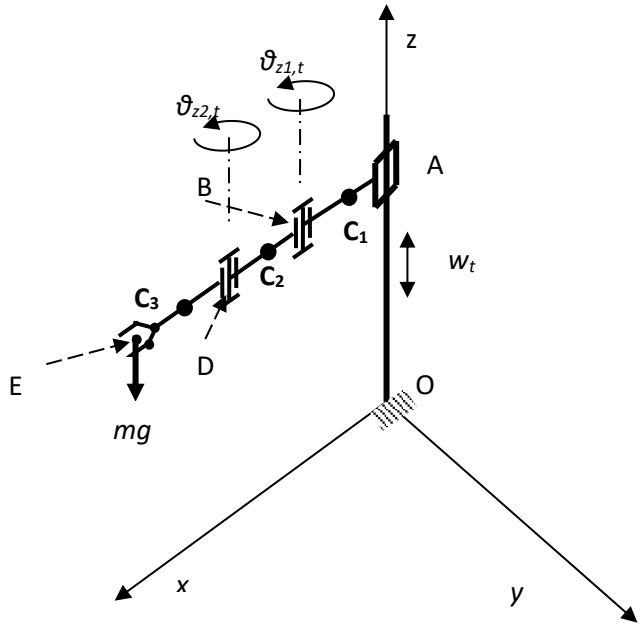

Рис. 2. Система координат для механизма с 3 степенями свободы

Принимая движение звена 1 внешним и подставляя вместо лагранжевых координат системы (28) правые части уравнений системы (29), в соответствии с уравнением (5) получаем уравнения совмещенного движения для звена 2

$$(x)_2 = L_B + \left(\alpha - L_B\right)\cos\Delta\theta_{z1} - \beta\sin\Delta\theta_{z1}\,,$$

$$(y)_2 = \left(\alpha - L_B\right)\sin\Delta\theta_{z1} + \beta\cos\Delta\theta_{z1}, \qquad (z)_2 = \gamma + w(t)\,. \tag{31}$$

Совмещенное движение (31) является внешним по отношению к движению звена 3, поэтому для определения уравнений движения звена 3 с учетом движения звеньев 1 и 2 заменяем лагранжевы координаты в системе (31) соответствующими выражениями из системы (30)

$$(x)_3 = L_B + [b - L_B + \left(\alpha - L_D\right)\cos\Delta\theta_{z2} - \beta\sin\Delta\theta_{z2}]\cos\Delta\theta_{z1} - [\left(\alpha - L_D\right)\sin\Delta\theta_{z2} + \beta\cos\Delta\theta_{z2}]\sin\Delta\theta_{z1},$$

$$(y)_3 = [L_D - L_B + (\alpha - L_D)\cos\Delta\theta_{z2} - \beta\sin\Delta\theta_{z2}]\sin\Delta\theta_{z1} + [(\alpha - L_D)\sin\Delta\theta_{z2} + \beta\cos\Delta\theta_{z2}]\cos\Delta\theta_{z1},$$

$$(z)_3 = \gamma + w(t)\,.$$

Звенья 2 и 3 участвуют в поступательном и вращательных движениях. Чтобы уточнить вид уравнения для определения кинетической энергии, представим (16) в виде суммы трех интегралов

$$E_k = 0,25[\int_m (x_t^2 + y_t^2)\delta m + \int_m (y_t^2 + z_t^2)\delta m + \int_m (z_t^2 + x_t^2)\delta m] .$$

Оба звена предусматривают возможность вращения относительно вертикальной оси. Если $w_t \neq 0$ первое слагаемое следует записать в виде

$$E_k' = 0,25[(x_t)_C^2 + (y_t)_C^2]m + 0,25\theta_{z1,t}^2 \int_m [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]\delta m .$$

Второй интеграл не предусматривает вращение вокруг оси *x*, поэтому в результате интегрирования получим, совмещая полюс с центром масс звена,

$$E_k'' = 0,25[(y_t)_C^2 + (z_t)_C^2]m .$$

В связи с отсутствием вращения относительно оси *y*, аналогично получаем для последнего интеграла

$$E_k''' = 0,25\int_m (x_t^2 + z_t^2)\delta m = 0,25\int_m [(x_t)_P^2 + (z_t)_P^2]\delta m = 0,25[(x_t)_C^2 + (z_t)_C^2]m .$$

Для расчета кинетической энергии звеньев 2 и 3 применимо уравнение

$$E_k = 0,5v_C^2 + \xi\theta_{z,t}^2 J_C^z , \qquad (32)$$

где коэффициент второго слагаемого принимает значение ξ = 0,25, если $w_t \neq 0$, или ξ = 0,5, если $w_t = 0$. Результат при $w_t \neq 0$ можно рассматривать как частный случай общего уравнения (19), когда угловые скорости $\theta_{x,t}$ и $\theta_{y,t}$ обращаются в 0.

Отметим, что одновременная работа всех 3 приводов приводит к снижению затрат энергии на вращение как звеньев, так и транспортируемого груза, по сравнению с последовательным режимом работы каждого из приводов [6].

Приведенные примеры показывают необходимость использования уравнения (19) в виде (27) и (32) вместо (1) и целесообразность уточнения (19) с учетом допустимых кинематических условий рассматриваемых механизмов.

Отмеченный в заголовке парадокс состоит в том, что при переходе от плоскопараллельного движения, например при вращении относительно фиксированной оси, к пространственному (за счет появления перемещений в направлении оси вращения) кинетическая энергия вращения тела с той же угловой скоростью уменьшается в 2 раза. В системе появляется избыточная энергия, которая может быть направлена на реализацию планируемых механизмом движений при уменьшении внешних энергозатрат, например, при работе робот–манипуляторов с рассмотренными структурными схемами.

Убедительным подтверждением отмеченного парадокса является поведение китайского волчка, который использует избыточную энергию для повышения потенциальной энергии в

гравитационном поле Земли, и пуговицы-жужжалки, в которой незначительные поступательные перемещения в направлении оси вращения приводят к существенному увеличению угловой скорости и угла поворота пуговицы.

Нельзя исключать, что отмеченный парадокс проявляется также в жидких и газовых средах в виде увеличения скорости вытекания жидкости при закрученной струе или из вращающихся сосудов, а также при формировании торнадо и родственных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. – М.: АСТ, 2019. – 478 с.
2. *Алюшин Ю.А.* Энергетические основы механики. – М.: Машиностроение, 1999. – 192 с.
3. *Алюшин Ю.А.* Механика твердого тела в переменных Лагранжа. – Москва: Машиностроение, 2012. –192 с
4. *Алюшин Ю.А.* Энергетические основы механики. Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 с.
5. *Алюшин Ю.А.* Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа//Проблемы машиностроения и надежности машин. –2001. – №3.– с. 13–19.
6. *Алюшин Ю.А.* Динамический анализ робот–манипуляторов в пространстве переменных Лагранжа // Проблемы машиностроения и надежности машин (препринт).