Препринт ReserachGate // DOI: 10.13140/RG.2.2.24176.07685

КИТАЙСКИЙ ВОЛЧОК И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Алюшин Ю.А.
Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, 119991, Россия
alyushin7@gmail.com

Многообразие движений неизмеримо, но, как и всеми другими процессами, ими управляет единственный закон, «… исключений из этого закона не существует; насколько мы знаем, он абсолютно точен. Название его — сохранение энергии» [1].

В середине прошлого века была популярна задача для абитуриентов на вступительных экзаменах в МФТИ, которую, с учетом современных технологий ЕГЭ, можно сформулировать так:

> «В холодильнике температура 0^0С, в комнате $+20^0$С. Как изменится температура в помещении, если открыть дверь холодильника?
> Варианты ответов: А) не изменится; В) уменьшится; С) возрастет».

Гипнотизирует слово «температура» и многие считали правильным ответ В. Они забывали, что температура – характеристика энергетического состояния системы. Правильный ответ очевиден: электрическая энергия, поступающая в холодильник, но не упоминаемая в условиях задачи, будет повышать температуру в помещении.

Аналогично у китайского волчка гипнотизирует «центр масс»: вопреки ожиданиям он принимает не минимальное, а максимально возможное положение. Не умаляя значимости имеющихся в интернете объяснений, предлагаю использовать для этого закон сохранения энергии.

Сформулируем задачу так: какова будет угловая скорость ω_1 волчка после его «переворота» при начальное ее значении ω_0, если известны масса m и момент инерции J_C относительно оси симметрии волчка?

Ответ очевиден: по закону сохранения энергии исходная кинетическая энергия E_k расходуется на изменение его потенциальной энергии ΔE_p за счет подъема центра масс на величину Δh и вращение волчка с угловой скоростью ω_1. Пренебрегая трением, получим (g – ускорение свободного падения)

$$0,5J_C\omega_0^2 = mg\Delta h + 0,5J_C\omega_1^2 \qquad \text{или} \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - 2mg\Delta h / J_C\,. \qquad (1)$$

Остается выяснить: почему закон сохранения энергии преобразует кинетическую энергию вращательного движения в потенциальную, поднимая на максимально возможный уровень центр масс? Для этого приведем вывод использованной выше формулы для расчета кинетической энергии вращающегося тела.

Поскольку предлагаемая статья ориентирована на широкий круг читателей, ниже использованы наиболее распространенные обозначения и приведен полный вывод требуемых уравнений, что позволяет воспроизвести их любому читателю.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела, принимая аргументами всех используемых ниже уравнений начальные координаты точек (переменные Лагранжа), заменив их обозначениями $\alpha = x_0$, $\beta = y_0$, $\gamma = z_0$ [2].

При плоскопараллельном движении положение тела можно определить по двум точкам, например, полюсу P и произвольной точке M. Обозначим их координаты в

исходном состоянии $P_0(\alpha_P, \beta_P)$, $M_0(\alpha_M, \beta_M)$, в текущем состоянии $P(x_P, y_P)$ и $M(x_M, y_M)$, угол между прямой PM и осью x в исходном состоянии φ_0, в текущем состоянии – φ. Запишем соотношения между координатами точек M и P в начальный момент

$$\alpha_M = \alpha_P + L_0 \cos\varphi_0, \qquad \beta_M = \beta_P + L_0 \sin\varphi_0.$$

Аналогичные зависимости для произвольного времени

$$x_M = x_P + L_0 \cos\varphi, \qquad y_M = y_P + L_0 \sin\varphi,$$

с учетом приращения угла поворота $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, преобразуем к виду

$$x_M = x_P + L_0 \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) = x_P + L_0(\cos\varphi_0 \cos\Delta\varphi - \sin\varphi_0 \sin\Delta\varphi),$$

$$y_M = y_P + L_0 \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) = y_P + L_0(\sin\varphi_0 \cos\Delta\varphi + \cos\varphi_0 \sin\Delta\varphi).$$

Заменяя в правой части множители с начальным значением угла φ_0, получаем уравнения движения частиц тела, вращающегося относительно подвижного полюса P

$$x_M = x_P + (\alpha_M - \alpha_P)\cos\Delta\varphi - (\beta_M - \beta_P)\sin\Delta\varphi,$$

$$y_M = y_P + (\alpha_M - \alpha_P)\sin\Delta\varphi + (\beta_M - \beta_P)\cos\Delta\varphi. \qquad (2)$$

В этих уравнениях от времени t зависят координаты полюса x_P, y_P и угол поворота тела $\Delta\varphi$. Если их продифференцировать по времени, получим соотношения между скоростями полюса P и произвольной частицы M ($d\varphi / dt = \omega$ – угловая скорость)

$$dx/dt = (v_x)_M = (v_x)_P - \omega(y_M - y_P), \qquad dy/dt = (v_y)_M = (v_y)_P + \omega(x - x_P). \qquad (3)$$

Уравнений (2) – (3) достаточно для определения кинетической энергии при любых движениях абсолютно твердых тел. Для плоскопараллельных движений в других плоскостях они могут быть получены круговой подстановкой ($x \to y \to z \to x$, $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$), а для более сложных пространственных движений – за счет принципа суперпозиции [2 – 4], который позволяет рассматривать сложные пространственные процессы как одновременную реализацию нескольких плоскопараллельных движений.

Кинетическую энергию тела с объёмом V, плотностью ρ и массой m определяет интеграл

$$E_k = 0,5\int_m v^2 dm = 0,5\rho\int_V v^2 dV = 0,5\int_m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm. \qquad (4)$$

При плоскопараллельном движении (2) по всему объему тела $v_z = 0$ и вместо (4) получаем

$$E_k = 0,5\int_m (v_x^2 + v_y^2) dm. \qquad (5)$$

С учётом соотношений (3) преобразуем правую часть

$$E_k = 0,5[(v_x^2)_P + (v_y^2)_P]m - \omega\int_m [(v_x)_P(y - y_P) - (v_y)_P(x - x_P)]dm + 0,5\omega^2\int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]dm. \qquad (6)$$

Для интегрирования во втором слагаемом воспользуемся понятием центра масс $C(x_C, y_C)$, координаты которого являются средне интегральными для массы тела

$$x_C m = \int_m x dm, \qquad y_C m = \int_m y dm. \qquad (7)$$

Так как координаты x_C, y_C остаются одинаковыми для всех частиц, их можно вынести за знак интеграла и вместо (6) записать

$$E_k = 0,5m[(v_x)_P^2 + (v_y)_P^2] - m\omega[(v_x)_P(y_C - y_P) - (v_y)_P(x_C - x_P)] + 0,5\omega^2 \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]dm \,. \quad (8)$$

Оставшийся в правой части интеграл называют моментом инерции, он определяет важнейшую динамическую характеристику твердого тела, которая является мерой инерции тела при вращательном движении, по аналогии с массой m при поступательном движении,

$$J_P = \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\delta m \,. \quad (9)$$

В результате вместо (8) можем записать

$$E_k = 0,5mv_P^2 + 0,5\omega^2 J_P - m\omega[(v_x)_P(y_C - y_P) - (v_y)_P(x_C - x_P)] \,. \quad (10)$$

Положение центра масс зависит от конфигурации тела и определяется по уравнениям (7). Положение полюса можно выбрать произвольно. Если в качестве полюса выбрать центр масс, последнее слагаемое обращается в 0 и формула (10) принимает вид

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\omega^2 J_C \,. \quad (11)$$

Чтобы получить формулу для рассматриваемого процесса с учетом пространственного вращения тела и возможным перемещением полюса в направлениях всех осей координат, воспользуемся изложенной методикой для случая, когда $v_z \neq 0$ и вместо (5) рассмотрим интеграл (4).

Пространственное вращение можно рассматривать как одновременное вращение относительно 3 осей координат с независимыми угловыми скоростями. Преобразуем правую часть уравнения (4) к виду, согласованному с возможностью изменения координат в каждом из этих вращательных движений,

$$E_k = 0,25\int_m [(v_x^2 + v_y^2) + (v_y^2 + v_z^2) + (v_z^2 + v_x^2)]dm \,. \quad (12)$$

Продолжим преобразования по аналогии с (6) – (11), выделив нижним индексом i ось, относительно которой вращается тело с угловой скоростью ω_i. Первый интеграл будет совпадать с приведенным выше для плоскопараллельного движения, но с другим коэффициентом перед интегралом

$$E_k' = 0,25\int_m (v_x^2 + v_y^2)\delta m =$$

$$= 0,25\int_m \{[(v_x^2)_P + (v_y^2)_P - 2\omega_z[(v_x)_P(y - y_P) - (v_y)_P(x - x_P)] + \omega_z^2[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]\}\delta m \,.$$

Переходя к центру масс C по соотношениям (7), запишем правую часть в виде

$$E_k' = 0,25\{(v_x^2)_P + (v_y^2)_P - 2\omega_z[(v_x)_P(y_C - y_P) - (v_y)_P(x_C - x_P)]\}m + \omega_z^2 \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2]dm \,.$$

Если совместить полюс с центром масс, получаем

$$E_k' = 0,25[(v_x^2)_C + (v_y^2)_C]m + 0,25\omega_z^2 \int_m [(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]dm \,. \quad (13)$$

Для двух других интегралов уравнения (12) аналогично находим

$$E_k'' = 0,25[(v_y^2)_C + (v_z^2)_C]m + 0,25\omega_x^2 \int_m [(y - y_C)^2 + (z - z_C)^2]dm \,, \quad (14)$$

$$E_k''' = 0,25[(v_x^2)_C + (v_z^2)_C]m + 0,25\omega_y^2 \int_m [(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2]dm \,.$$

Объединяя правые части (13) и (14), когда в качестве полюса принят центр масс тела, получаем окончательный результат [5]

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,25(\omega_x^2 J_C^x + \omega_y^2 J_C^y + \omega_z^2 J_C^z), \qquad (15)$$

где для моментов инерции использованы общепринятые обозначения типа (9)

$$J_C^z = \int_m [(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2]dm; \quad J_C^x = \int_m [(y-y_C)^2 + (z-z_C)^2]dm; \quad J_C^y = \int_m [(x-x_C)^2 + (z-z_C)^2]dm.$$

Указанные верхними индексами оси вращения соответствуют положению волчка в исходном состоянии. Моменты инерции могут быть определены как по исходной, так и по текущей конфигурации, так как подынтегральные функции, как это следует из уравнений движения (2), сохраняют свои значения при любом повороте тела, например

$$J_C^z = \int_m [(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2]dm = \int_m [(\alpha-\alpha_C)^2 + (\beta-\beta_C)^2]dm = const.$$

Если процесс сопровождается поступательными перемещениями во всех направлениях ($v_x \neq v_y \neq v_z \neq 0$), уравнение (15) применимо для любых соотношений угловых скоростей. Только при плоскопараллельном движении в любой плоскости справедливо уравнение (11), которое можно записать в общем виде для любой из плоскостей движения

$$E_k = 0,5mv_C^2 + 0,5\omega_i^2 J_C^i, \qquad \text{если } v_i = 0. \qquad (16)$$

Частный случай (16) не следует из результата (15), например, если $v_z = 0$. Оно должно быть учтено не в конечном результате, а в начале, когда преобразует уравнение (4) в (5) и конечный результат (15) в (11). В каждом конкретном случае пространственного движения твердого тела необходимо выяснить возможные изменения линейных и угловых скоростей частиц и после этого определять кинетическую энергию по формулам, соответствующим этим условиям.

Началом процесса будем считать запуск вращательного движения от внешнего источника, а точку контакта волчка с фиксированной неподвижной гладкой поверхностью – началом координат системы наблюдателя с вертикальной осью z.

Главная особенность китайского волчка связана с изменением расстояния между опорной поверхностью и центром масс при любом изменении точки контакта: оно будет возрастать, если центр масс находится в области $z_C < R$, или уменьшаться, если центр масс находится в области $z_C > R$.

Это выводит волчок из режима плоскопараллельного движения и кинетическую энергию вместо уравнения (11) будет определять уравнение (15). Пренебрегая угловыми скоростями ω_x и ω_y по сравнению с угловой скоростью ω_z, а также кинетической энергией поступательного движения волчка ($v_x \approx v_y \approx v_z \approx 0$), обнаруживаем, что при появлении поступательного перемещения в направлении оси вращения требуемая для той же угловой скорости ω_z энергия будет в два раза меньше

$$\tilde{E}_k = 0,25\omega_z^2 J_C^z.$$

В системе появляется избыточная энергия (момент инерции волчка после переворота не изменяется)

$$\Delta E = E_k - \tilde{E}_k = 5\omega_z^2 J_C^z - 0,25\omega_z^2 J_C^z = 0,25\omega_z^2 J_C^z,$$

которая должна либо увеличить угловую скорость вращения в 1,41 раза, по аналогии с вращением фигуристов при уменьшении момента инерции J_C^z, либо затратить ее на потенциальную энергию $\Delta E_p = mg\Delta h$, увеличивая расстояние от опорной поверхности до

центра масс. После переворота волчка, когда достигнуто максимально возможное увеличение потенциальной энергии, система возвращается к режиму плоскопараллельного движения, но уже с меньшей угловой скорости, в соответствии с законом сохранения энергии и соотношением (1).

Необходимое условие для переворота волчка: первоначальная кинетическая энергия должна не менее чем в 2 раза превышать приращение потенциальной энергии за счет увеличения координаты центра масс (Δh определяют конструктивные особенности волчка)

$$J_C \omega^2 > 2mg\Delta h .$$

Упомянутый выше второй вариант поведения системы с увеличением угловой скорости без изменения момента инерции J_C^z при незначительном смещении в направлении оси вращения можно наблюдать на примере другой детской игрушки «пуговица–жужжалка». Но в этом случае применяемые способы начального закручивания и удержания вращающегося тела приводят к циклическому процессу с суперпозицией продольных и крутильных вынужденных колебаний системы с одним неподвижным и вторым подвижным концом при участии энергии скручиваемой нити вместо потенциальной энергии гравитационного поля Земли [6].

Таким образом, поведение китайского волчка, Кельтского камня, волчка Томсона, яйца Колумба и других тел с проявлениями подобных «парадоксов» определяют закон сохранения энергии и кинематические особенности допускаемых режимов движения.

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: АСТ, 2019. – 478 с.
2. *Алюшин Ю.А.* Механика твердого тела в переменных Лагранжа. – Москва: Машиностроение, 2012. –192 с.
3. *Алюшин Ю.А.* Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа//Проблемы машиностроения и надежности машин. –2001. – №3.– с. 13–19.
4. *Алюшин Ю.А.* Энергетические основы механики. Lambert Academic Publishing, 2016. – 281 с.
5. *Алюшин Ю.А.* Динамический анализ робот–манипуляторов в пространстве переменных Лагранжа. // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2020.
6. *Алюшин Ю.А.* Суперпозиция движений с необратимой деформацией. Обработка материалов давлением. Краматорск. Украина 2020. №1 (50) стр. 3-15

Alyushin Yury Alekseevich
E-mail: alyushin7@gmail.com

Идентификатор автора в ORCID http://orcid.org/0000-0001-9977-3342

30.11.2020